$V(T) = ET^2 - (E(T))^2 = 0$

٢م

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\sqrt{2\pi}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} , \quad t \in R$$

وفي الحالة الخاصة اذا كان $n=1$

$$f_1(t) = \frac{1}{\pi}(1+t^2)^{-1} = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+t^2} , \quad t \in R$$

هو توزيع كوشي للوسيطين انه د.ذ

- والان لنوجد كل من التوقع والتباين لهذا المتغير

$$ET = \int t\, f_T(t)\, dt = 0$$

التوقع الرياضي لستودينت دائماً = 0 لان حدود التكامل متناظرة والدالة المستكملة هي دالة فردية

ط٢ $T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t(n) \Rightarrow T = \frac{\sqrt{n}\,X}{\sqrt{Y}} \Rightarrow ET = \sqrt{n}\,\underbrace{E(X)}_{=0}\,E\frac{1}{\sqrt{Y}} = 0$

$$ET = 0 \Rightarrow V(T) = ET^2$$

التباين لـ T^2

$$T = \frac{\sqrt{n}\,X}{\sqrt{Y}} \Rightarrow T^2 = \frac{n X^2}{Y} \Rightarrow$$

$$ET^2 = n\,EX^2\,E\frac{1}{Y} = n\,E\frac{1}{Y} \Rightarrow ET^2 = V(T) = \frac{n}{n-2} , \quad n > 2$$

لنوجد $E\frac{1}{Y}$

نفرض $\frac{y}{2} = t$, $y = 2t$, $dy = 2\,dt$

$$E\frac{1}{Y} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty \frac{1}{y}\, y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}}\, dy$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty y^{(\frac{n}{2}-1)-1} e^{-\frac{y}{2}}\, dy = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty 2^{(\frac{n}{2}-1)-1}\, t^{(\frac{n}{2}-1)}\, e^{-t}\, dt$$

$$= \frac{2^{\frac{n}{2}-1}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})}\int_0^\infty t^{(\frac{n}{2}-1)} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2\Gamma(\frac{n}{2})}\Gamma(\frac{n}{2}-1)$$

$$= \frac{\Gamma(\frac{n}{2}-1)}{2(\frac{n}{2}-1)\Gamma(\frac{n}{2}-1)} = \frac{1}{n-2}$$

مثال

اذا كان لدينا من نمط ستودينت اي ان $T \sim T(8)$ بدرجة حرية 8

فأوجد التوقع والتباين وما هو التوقع لـ $T(10)$ وأوجد $V(\sqrt{6}\,T)$

الحل

$$ET = 0 \;,\quad V(T) = \frac{n}{n-2} = \frac{8}{6}$$

$$E(10T) = 10\,ET = 10(0) = 0$$

$$V(\sqrt{6}\,T) = 6\,V(T) = 6 \cdot \frac{8}{6} = 8$$

ملاحظة: إذا كان لدينا متغير عشوائي X معلومة دالة الكثافة الاحتمالية وكان لدينا متغير عشوائي Y تابع لـ X بحيث يكون لـ X قيمتين عندئذ دالة الكثافة للمتغير Y سوف تعطى بالشكل

$$g_Y(y) = f(x)\left|\frac{dx_1}{dy}\right|_{x_1 = w_1(y)} + f(x)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|_{x_2 = w_2(y)}$$

$$= \sum_{i=1}^{2} f(x_i)\left|\frac{dx_i}{dy}\right|_{x_i = w_i(y)}$$

مثال: نفرض X متغير عشوائي طبيعي معياري أي أن $X \sim N(0,1)$ ولنوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير $Y = X^2$

الحل:

$$g_Y(y) = f(x)\left|\frac{dx_1}{dy}\right|_{x_1 = \sqrt{y}} + f(x)\left|\frac{dx_2}{dy}\right|_{x_2 = -\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left|\frac{dx_1}{dy}\right|_{x_1 = \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\left|\frac{dx_2}{dy}\right|_{x_2 = -\sqrt{y}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{y}{2}} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y}{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{y}} = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1}{2})} y^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \; y > 0$$

وهي دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يخضع لكاي مربع بدرجة حرية n

بالتالي $Y \sim \chi^2(1)$

مبرهنة:

لنفرض X من نمط كاي مربع بدرجة حرية 1 ولنفرض $X_1, X_2 \,—\, X_n$ عينة عشوائية لـ X عندئذ:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(n)$$

البرهان: نعلم أن

$$M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = (M_X(t))^n = \left[(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\right]^n = (1-2t)^{-\frac{n}{2}}$$

وهي الدالة المولدة لكاي مربع بدرجة حرية n اي ان مجموع متغير ان العينة لمتغير عشوائي من توزيع كاي مربع درجة واحدة سوف تتبع لتوزيع كاي مربع بدرجة حرية n.

نظرية المعاينة:

تعريف المجتمع الاحصائي: هو كل الأشياء او الافراد التي تجرى عليها الدراسة وعادة يوصف كل مجتمع احصائي يسمى باسم هذا التوزيع واذا كان التوزيع توزيعاً منفصلاً ندعونا المجتمع بمجتمع احصائي منفصل ووسطاء التوزيع هي وسطاء المجتمع الاحصائي وان كان التوزيع المستمر عندئذ ندعو المجتمع الاحصائي بالمجتمع الاحصائي المستمر ووسطاء هذا المجتمع سوف تكون نفسها التوزيع الاحتمالي.

على سبيل المثال: احتمالي

إذا كان لدينا مجتمع احصائي موصوف بالتوزيع البواسوني ووسيطه λ عندئذ ندعو هذا المجتمع بالمجتمع الاحصائي البواسوني بحيث λ يمثل وسيط هذا المجتمع وكل ما ينطبق على التوزيع البواسوني ينطبق على المجتمع أيضاً

اذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً موصوفاً بتوزيع احتمالي طبيعي وسيطه الاول μ

وعلى هذا المثال يوجد مجتمعات أحصائية بعدد التوزيعات الاحتمالية التي مرت معنا

العينة العشوائية:

هي جزء من المجتمع الاحصائي نأخذ باستقلالية وبنفس الاحتمال وعادة يرمز بملاحظات العينة $X_1, X_2, \ldots, X_n$ واذا كان حجم العينة n وكان حجم المجتمع N محدد عندئذ $n \le N$

ملاحظة:

اذا كان لدينا مجتمعاً احصائياً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ وهذا يعني لدينا متغير